

Appunti (incompleti) sugli automi cellulari

Marco Sandri
Viale Rimembranza 2
37015 Sant'Ambrogio di Valpolicella
(Verona) - Italy
info@msandri.it
<http://www.msandri.it/>

2 Marzo 1993

Capitolo 1

Teoria degli automi cellulari

1.1 Automi Cellulari Elementari.

1.1.1 Introduzione.

Per ragioni di chiarezza espositiva tratteremo qui inizialmente di una classe molto semplice di automi cellulari, anche se per questo non meno interessante e ricca sotto il profilo dei comportamenti dinamici mostrati: gli automi cellulari ad una sola dimensione e con due soli possibili stati per ogni unità, nei quali lo stato di ogni cella in un dato periodo dipende da quelli assunti dalla medesima cella e dalle due celle del suo intorno nel periodo precedente⁽¹⁾.

Ciò ci consentirà di prendere contatto con i primi fondamentali aspetti della teoria, evitando di dover sin da subito ricorrere alla (spesso) pesante simbologia. Nell'esposizione faremo inoltre uso di numerosi esempi, al fine di meglio comprendere le nozioni che via via vengono trattate. Successivamente, sulla base di quanto appreso, cercheremo di delineare le direzioni lungo le quali la nozione di automa cellulare può essere estesa, per giungere così alla formulazione di una definizione sufficientemente generale e completa per gli scopi del presente lavoro.

¹Sono quelli che Wolfram [Wolfram (1983)] chiama *automi cellulari elementari*.

1.1.2 Definizioni.

Un automa cellulare unidimensionale infinito è costituito da un insieme infinito (numerabile) di celle (*sites*) che possiamo pensare spazialmente allineate su di una retta, nel modo qui indicato:

...	...	x_{i-r}	...	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	...	x_{i+r}
-----	-----	-----------	-----	-----------	-----------	-------	-----------	-----------	-----	-----------	-----	-----

Ipotizziamo, per ora, che lo stato x_i di ciascuna di queste unità elementari sia una variabile binaria, cioè possa assumere due soli valori, 0 o 1. In simboli:

$$x_i \in S = \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathbf{Z}, \quad (1.1)$$

dove \mathbf{Z} indica qui l'insieme dei numeri interi relativi. Diciamo di tipo *one-bit* (cfr. [Rucker (1989)]) o 'in base 2', automi dotati di questa proprietà.

Definiamo *configurazione* ogni sequenza (o stringa) bi-infinita⁽²⁾ $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ di elementi $x_i \in S$. Ciascuna configurazione chiaramente rappresenta un possibile stato dell'automa. Con \mathbf{x}^t indichiamo lo stato dell'automa cellulare al tempo t . Alla stringa $\{\dots 01101001111\dots\}$ corrisponde quindi lo stato:

...	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

Lo spazio delle configurazioni (o spazio degli stati) risulta essere l'insieme di tutte le possibili stringhe binarie \mathbf{x} , cioè :

$$X = \dots \times S \times S \times S \times \dots = S^{\mathbf{Z}} = \{\mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}} : x_i \in S \quad \forall i \in \mathbf{Z}\}. \quad (1.2)$$

dove \times indica il prodotto cartesiano fra insiemi.

Per ogni automa cellulare viene poi definita una funzione booleana o *regola locale* $F : S^3 \rightarrow S$ la quale fissa la legge secondo cui evolve nel tempo lo stato di ogni cellula:

$$x_i^{t+1} = F[x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t] \quad \forall i \in \mathbf{Z} \quad \text{e} \quad \forall t \in \mathbf{N}. \quad (1.3)$$

Questo tipo di regola evolutiva stabilisce cioè che il valore di ogni cella in un dato periodo dipende dal valore della medesima cella nel periodo precedente e da quello delle 2 celle (l'una a destra e l'altra a sinistra) ad essa più vicine.

A sua volta la regola F identifica una mappa f di X in se' stesso, la cui componente i -esima è definita da (cfr. [Shereshevsky (1992)]):

$$[f(\mathbf{x}^{t+1})]_i = F[x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t] \quad \forall i \in \mathbf{Z} \quad \text{e} \quad \forall t \in \mathbf{N}. \quad (1.4)$$

²Una stringa bi-infinita è una sequenza di simboli che risulta illimitata tanto a destra quanto a sinistra. Un esempio di stringa solo infinita (a destra) è $\{010100111\dots\}$.

Chiaramente, la mappa $f : X \rightarrow X$ rappresenta un sistema dinamico nel tempo discreto il cui spazio di fase è proprio l'insieme X , cioè :

$$\mathbf{x}^{t+1} = f(\mathbf{x}^t) \quad \text{con } \mathbf{x} \in X. \quad (1.5)$$

Più propriamente, utilizzeremo il termine *automa cellulare* (o CA) per indicare la mappa⁽³⁾ f .

Esempio 1.1 Andiamo a considerare un primo semplice automa cellulare unidimensionale in base 2, caratterizzato dalla regola locale $F : S^3 \rightarrow S$:

$$x_i^{t+1} = F[x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t] = (x_{i-1}^t \cdot \bar{x}_i^t) + (x_i^t \cdot x_{i+1}^t) \quad \forall i \in \mathbf{Z} \quad \text{e} \quad \forall t \in \mathbf{N}. \quad (1.6)$$

dove \cdot e $+$ rappresentano rispettivamente le operazioni di moltiplicazione (AND) ed addizione (OR) booleane, mentre \bar{x}_i è la complementazione (NOT) di x_i ⁽⁴⁾.

Esistono diversi modi di rappresentare una data regola locale: o indicarne l'espressione booleana come è stato fatto in (1.6), oppure costruire quella tavola che, per ogni possibile configurazione degli stati delle celle dell'intorno (e quindi per ogni elemento del dominio S^3 della funzione F), fornisce il corrispondente stato della cella i -esima (cioè la corrispondente immagine in S , secondo F).

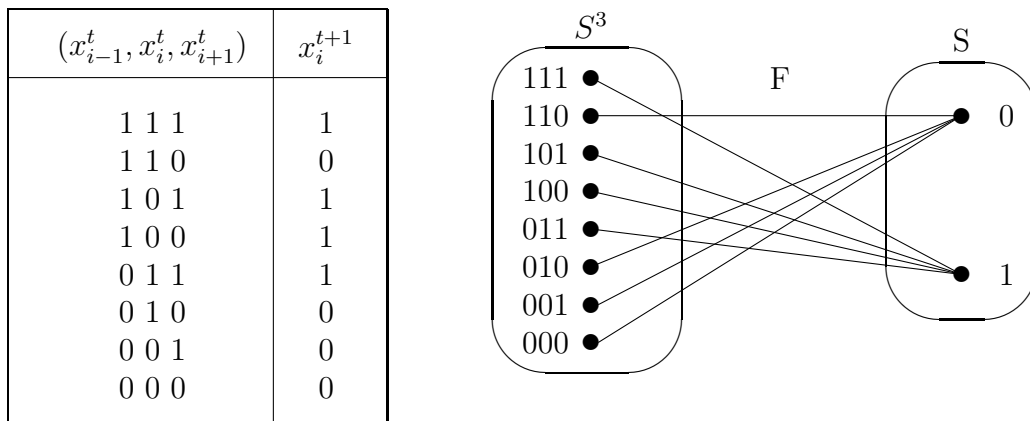


Figura 1.1: *Rule Table* e rappresentazione sagittale della regola locale (1.6).

Fissato arbitrariamente uno stato iniziale \mathbf{x}^0 dell'automa, siamo a questo punto in grado di riprodurre l'intera sua evoluzione per i periodi futuri. A titolo d'esempio, calcoliamo qui l'evoluzione per 10 successivi periodi del CA definito dalla (1.6), a partire da una data situazione iniziale che viene riportata nella prima riga:

³Talvolta f viene anche chiamata *global update rule* [Hanson e Crutchfield (1991)].

⁴Si veda l'Appendice Matematica.

```

...010101100000000001111100000011110001000001100010000010000111011000...
...01011010000000000111101000001110100010000101000100000100011011010...
...011010100000000011101010000110101000100001010001000001001011010...
...1010101000000001101010100010101010001000010100010000010011010...
...10101010000000101010101000101010100010000101000100000101010...
...10101010000001010101010001010101000100001010001000001010...
...101010100000010101010100010101010001000010100010000010...
...101010100000010101010100010101010001000010100010000010...
...10101010000001010101010001010101000100001010001000...
...101010100000010101010100010101010001000010100010...
...1010101000000101010101000101010100010000101000...

```

Ai fini pratici, noi non possiamo considerare, per ovvie ragioni, tutte le unità che compongono la stringa \mathbf{x}^t . Ci dobbiamo limitare a considerare, come abbiamo fatto sopra, solo un sottoinsieme finito delle infinite celle. Se pertanto definiamo n celle dello stato \mathbf{x}^0 (66, nell'esempio di cui sopra), accade che in generale possiamo arrivare a determinare solamente lo stato di $n - 2, n - 4, \dots, n - 2t$ celle. In altri termini, se vogliamo conoscere quale sarà lo stato di m unità dell'automata dopo t iterazioni, dobbiamo specificare lo stato delle $m + 2t$ unità dell'intorno al tempo 0. Questo significa anche che ad ogni passo temporale la regione influenzata dallo stato di una cella conta al più 3 celle, e dopo t periodi al più $1 + 2t$ celle. L'informazione contenuta in una unità si propaga cioè lungo le due direzioni al più di una cella per periodo.

Una tecnica molto usata (e graficamente piacevole) per rappresentare l'evoluzione nel tempo di un automa cellulare consiste nel disegnare (su schermo o su carta) una matrice di $(t \times n)$ punti le cui righe indicano lo stato dell'automata in ciascuno dei t periodi in cui viene seguita l'evoluzione, mentre le colonne rappresentano le n celle prese in esame. Ciascuna cella viene colorata di nero se assume lo stato 1 e lasciata vuota in caso contrario.

Riportiamo qui alcuni esempi di questo tipo di rappresentazione per tre diverse configurazioni (casuali e non) della condizione iniziale:

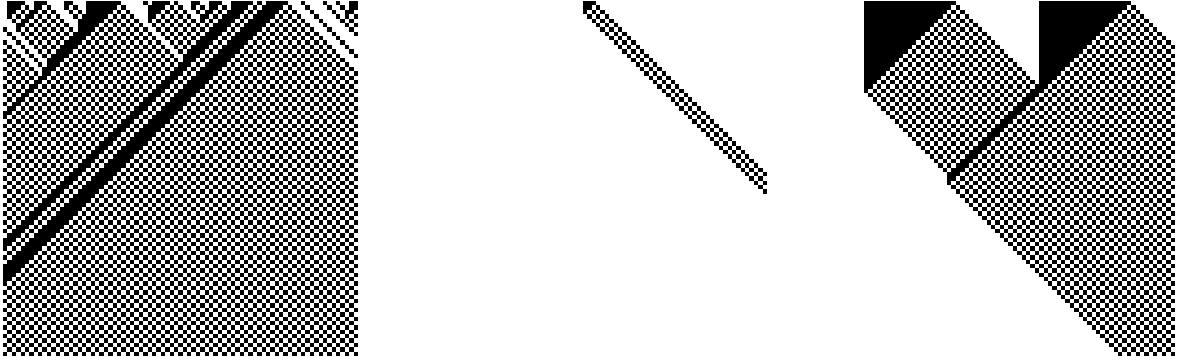
Dalla figura 1.1 si comprende che ogni regola locale F di un automa cellulare unidimensionale in base 2 è descritto in modo completo da un numero di 8 cifre binarie (o in alternativa dal corrispondente numero decimale):

denominato *numero* o *codice* della regola locale [Wolfram (1984)]. Come risulta dalla figura 1.1, la regola dell'esempio 1.1 è caratterizzata dal codice 10111000 (in base 2) o 184 (in base 10).

Poichè i numeri che si possono comporre con otto cifre binarie sono $2^8 = 256$, tale sarà anche il numero di regole locali che si possono formulare per automi cellulari elementari⁽⁵⁾.

Fra queste vengono poi definite *illegali* [Wolfram (1983)] quelle che non soddisfano le due seguenti proprietà:

⁵L'elenco completo di queste lo si può trovare in [Wolfram (1986)], pp. 487-492.



$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$, ricavato dalla tabella:

$(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$	x_i^{t+1}
1 1 1	α_1
1 1 0	α_2
1 0 1	α_3
1 0 0	α_4
0 1 1	α_5
0 1 0	α_6
0 0 1	α_7
0 0 0	α_8

1. condizione di quiescenza: allo stato nullo 000 dell'intorno la regola locale associ lo stato 0, cioè $F[0, 0, 0] = 0$; ciò impone che l'ultima delle otto cifre binarie, α_8 , sia pari a 0; scopo di questa condizione è di impedire propagazioni 'istantanee' del valore 1 nello stato del sistema;
2. simmetria speculare: agli intorni 001 e 100 (come pure a 011 e 110) la regola locale associ il medesimo valore, cioè $F[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = F[x_{i+1}, x_i, x_{i-1}]$; in termini di cifre binarie deve essere:

$$\alpha_5 = \alpha_2 \quad \alpha_7 = \alpha_4; \tag{1.7}$$

questa condizione garantisce l'isotropia e l'omogeneità nell'evoluzione dell'automa cellulare.

Le regole legali sono quindi caratterizzate da numeri con la seguente rappresentazione binaria:

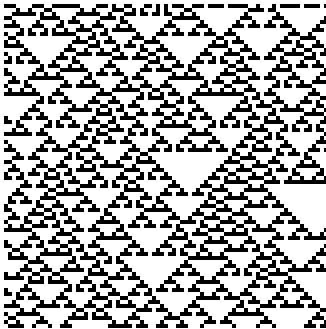
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_2\alpha_6\alpha_40 \tag{1.8}$$

Evidentemente la regola dell'esempio 1.1, pur soddisfacendo la condizione di quiescenza, non è legale, in quanto $\alpha_5 \neq \alpha_2$ e $\alpha_7 \neq \alpha_4$.

Essendo 5 le cifre binarie ‘libere’ (le altre sono invece, per così dire, vincolate al valore delle prime o ad un valore fissato), il numero delle regole legali scende a: $2^5 = 32$.

Esempio 1.2 La regola 22 è una regola legale: il suo numero in forma binaria è infatti 00010110, e quindi $\alpha_8 = 0$, $\alpha_5 = \alpha_2$ e $\alpha_7 = \alpha_4$. Regole legali sono anche 90 e 150, mentre illegali sono ad esempio 45, 73, 105. Mostriamo qui sotto la loro evoluzione a partire da uno stato iniziale disordinato. Si noti la grande varietà dei comportamenti dinamici mostrati.

Regola 22 (00010110)



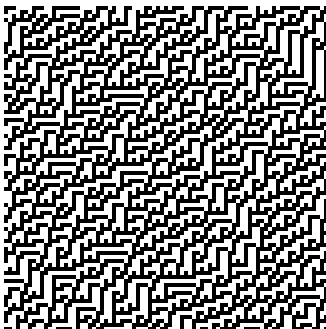
Regola 90 (01011010)



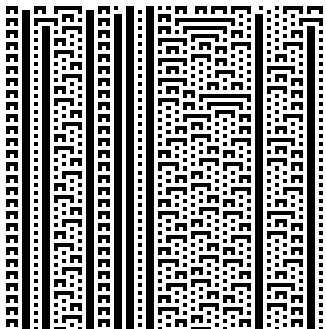
Regola 150 (10010110)



Regola 45 (00101101)



Regola 73 (01001001)



Regola 105 (01101001)



Talvolta si considera anche la speciale classe delle regole *totalitarie*, nelle quali il valore di una cella dipende esclusivamente dalla somma dei valori delle celle dell'intorno:

$$x_i^{t+1} = \hat{F}[x_{i-1}^t + x_i^t + x_{i+1}^t], \quad (1.9)$$

dove la regola locale $\hat{F} : \hat{S} \rightarrow S$, con $\hat{S} = \{0, 1, 2, 3\}$, ha una natura un po' diversa dalla F definita in (1.3). Infatti, mentre il dominio di F è l'insieme S^3 delle possibili configurazioni degli stati delle unità dell'intorno, \hat{F} ha per dominio l'insieme \hat{S} dei possibili numeri di unità che si trovano nello stato 1.

Anche se con un significato lievemente differente, possiamo ancora identificare ciascuna regola totalitaria con un codice di 4 cifre binarie. Dette regole sono quindi complessivamente: $2^4 = 16$.

$x_{i-1}^t + x_i^t + x_{i+1}^t$	x_i^{t+1}
3	α_1
2	α_2
1	α_3
0	α_4

Figura 1.2:

Analogamente si può definire la classe delle regole *semi-totalitarie* [Rucker (1989)] o *totalitarie all'esterno* [Packard e Wolfram (1985)]:

$$x_i^{t+1} = \tilde{F}[x_i^t, x_{i-1}^t + x_{i+1}^t], \quad (1.10)$$

dove $\tilde{F} : \tilde{S} \rightarrow S$, e $\tilde{S} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.

Anche per questa classe, si può costruire la *rule table* corrispondente:

$(x_i^t, x_{i-1}^t + x_{i+1}^t)$	x_i^{t+1}
(1, 2)	α_1
(1, 1)	α_2
(1, 0)	α_3
(0, 2)	α_4
(0, 1)	α_5
(0, 0)	α_6

$x_i^t \backslash x_{i-1}^t + x_{i+1}^t$	0	1	2
0	α_6	α_5	α_4
1	α_3	α_2	α_1

Figura 1.3:

Esempio 1.3 Un esempio di regola semi-totalitaria potrebbe essere il seguente:

- 1) se lo stato della cella è 0 e la somma dei vicini 1, allora il nuovo stato della cella è 1;
- 2) se lo stato della cella è 1 e la somma dei vicini 1 o 2, il nuovo stato della cella è 1;
- 3) in tutti gli altri casi il nuovo stato è 0.

Questa è la regola semi-totalitaria 50 che si può facilmente provare essere equivalente alla regola 230 (11100110).

Esempio 1.4 Un esempio di regola totalitaria è :

- 1) se il numero delle celle dell'intorno che si trovano nello stato 1 sono 1 o 2, allora il nuovo stato della cella è 0;
- 2) negli altri casi il nuovo stato è 1.

Questa è la regola totalitaria 9, equivalente alla regola semi-totalitaria 33 ed alla regola 129.

È facile rendersi conto che la famiglia delle regole semi-totalitarie contiene quella delle regole totalitarie, dato che ognuna di queste ultime può essere espressa come regola semi-totalitaria nel modo seguente:

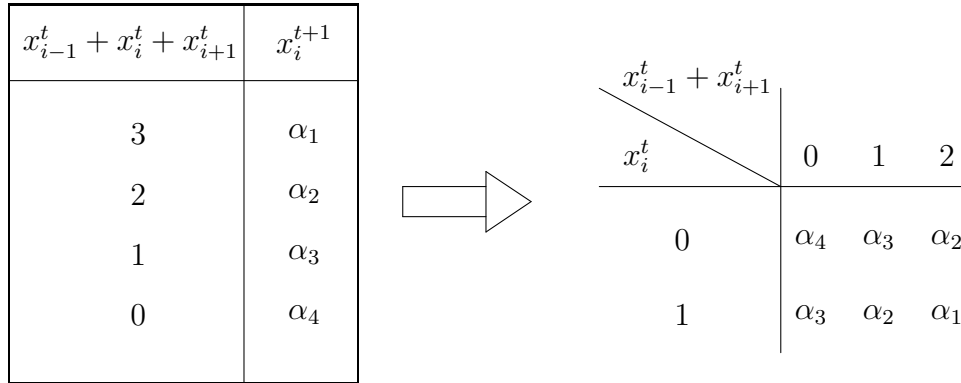


Figura 1.4:

Un'altra importante classificazione è quella fra regole locali *lineari* e *non lineari* [Jen (1990)] [Wolfram (1983)]. Una regola F si definisce lineare se soddisfa la condizione di additività, cioè se, per ogni coppia di intorni $x = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ e $y = (y_{i-1}, y_i, y_{i+1})$, essa soddisfa la:

$$F[x] \oplus F[y] = F[x \oplus y], \tag{1.11}$$

oppure se, per ogni coppia di intorni $x = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ e $y = (y_{i-1}, y_i, y_{i+1})$, soddisfa:

$$F[x] \oplus F[y] = \overline{F[x \oplus y]}, \tag{1.12}$$

dove \oplus indica l'addizione modulo 2 (detta anche OR-esclusivo o funzione di anti-coincidenza)⁽⁶⁾.

Per gli automi cellulari elementari le regole lineari sono complessivamente 16, e precisamente: 0, 15, 51, 60, 85, 90, 102, 105, 150, 153, 165, 170, 195, 204, 240, 255. Di queste, le sole regole legali sono quelle che si presentano nella forma: $\alpha_1\alpha_20\alpha_4\alpha_2\alpha_1\alpha_40$ con $\alpha_4 = \alpha_1 \oplus \alpha_2$, cioè le regole: 0, 90, 150, 204.

Esempio 1.5 La regola 90 (01011010), definita da $x_i^{t+1} = F[x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t] = x_{i-1}^t \oplus x_{i+1}^t$ è lineare nel senso indicato dalla relazione (1.11), infatti:

$$F[x] \oplus F[y] = (x_{i-1} \oplus x_{i+1}) \oplus (y_{i-1} \oplus y_{i+1}) = (x_{i-1} \oplus y_{i-1}) \oplus (x_{i+1} \oplus y_{i+1}) = F[x \oplus y].$$

Esempio 1.6 La regola 51 (00110011), definita da $x_i^{t+1} = F[x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t] = \bar{x}_i^t$ è invece lineare nel senso indicato dalla relazione (1.12), infatti:

$$F[x] \oplus F[y] = \bar{x}_i \oplus \bar{y}_i = x_i \oplus y_i = \overline{\overline{x_i \oplus y_i}} = \overline{F[x \oplus y]}.$$

⁶Si veda l'Appendice Matematica.

Da quanto abbiamo sin qui detto è facile convincersi che in un qualsiasi automa cellulare ogni configurazione \mathbf{x}^t ha sempre un unico successore \mathbf{x}^{t+1} , cioè la $f : X \rightarrow X$ definita in (1.4) e (1.5) è una funzione che associa ad ogni elemento \mathbf{x} del dominio X uno ed un solo elemento \mathbf{y} appartenente ancora ad X .

Al contrario, una configurazione \mathbf{x}^t può avere più di un predecessore \mathbf{x}^{t-1} . In altre parole, la mappa $f : X \rightarrow X$ può essere non iniettiva e pertanto non invertibile. La situazione viene qui sotto schematizzata:

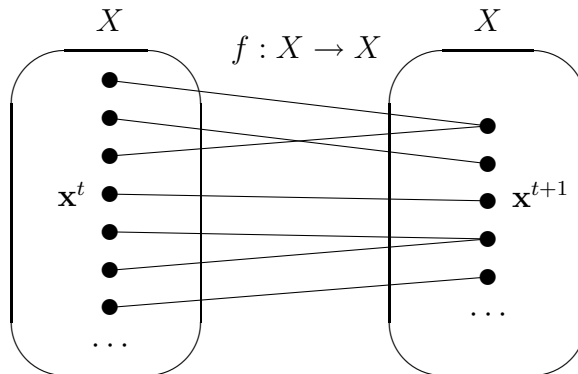


Figura 1.5:

La non iniettività di f porta con sé due importanti conseguenze:

- la presenza di una molteplicità di predecessori rende impossibile ripercorrere a ritroso nel tempo le dinamiche del sistema, ricostruire la storia che lo ha condotto alla configurazione presente; l'informazione contenuta nella configurazione relativa ad un dato istante viene cioè persa con l'evolversi nel tempo dell'automata;
- come avremo modo di vedere, alcune configurazioni (dette pittorescamente 'Giardini dell'Eden') non hanno predecessori: esse si possono presentare esclusivamente come stati iniziali, mai come stati generati attraverso l'evoluzione.

Dato l'interesse che questa proprietà degli automi cellulari riveste, riprenderemo la sua trattazione nel paragrafo 1.3, legandola alla nozione di reversibilità.

Esempio 1.7 Consideriamo la regola 32 (00100000) e la configurazione in cui tutte le celle sono nello stato 1: $\mathbf{x} = \dots 11111111 \dots$. Questa è senza dubbio un 'Giardino dell'Eden' in quanto non è possibile trovare alcun suo predecessore secondo la regola data. La stringa nulla $\mathbf{x} = \dots 00000000 \dots$ ha invece una molteplicità di predecessori: la stessa stringa nulla, la stringa composta da tutti 1, la stringa periodica $\dots 00100100100100100 \dots$ e molte altre. L'automata indotto dalla regola 32 è quindi non invertibile.

Esempio 1.8 Gli automi cellulari indotti dalle regole 15 (00001111), 51 (00110011), 85 (01010101), 170 (10101010), 204 (1100110011) sono casi evidenti (e banali) di automi cellulari elementari invertibili (ICA d'ora in poi). Per la regola 51, ad esempio, ogni configurazione ha uno ed un solo predecessore dato molto semplicemente da:

$$\mathbf{x}^{t-1} = f^{-1}[\mathbf{x}^t] = f^{-1}[\dots x_{i-r}^t \dots x_{i-1}^t x_i^t x_{i+1}^t \dots x_{i+r}^t \dots] = \dots \bar{x}_{i-r}^t \dots \bar{x}_{i-1}^t \bar{x}_i^t \bar{x}_{i+1}^t \dots \bar{x}_{i+r}^t \dots$$

dove f^{-1} è la funzione inversa dell'automata cellulare f .

1.1.3 Proprietà fondamentali.

Prima di procedere oltre nell'esposizione della teoria, è opportuno evidenziare alcune caratteristiche fondamentali degli automi cellulari che sono venute emergendo in queste prime pagine.

Per prima cosa gli automi cellulari sono sistemi dinamici discreti:

1. discreti in senso spaziale, in quanto risultano costituiti da un reticolo (unidimensionale per ora) di unità elementari;
2. discreti in senso temporale; l'evoluzione dello stato di ogni cella, e quindi dell'automa, avviene per passi temporali discreti;
3. discreti nello stato di ogni cella, nel senso che ogni unità elementare può assumere soltanto un numero finito di stati (per il momento due: 0 o 1).

La regola che governa l'evoluzione di ogni automa cellulare è sostanzialmente locale:

1. in senso spaziale, essa infatti tiene conto esclusivamente dello stato di un intorno prefissato di celle (per gli automi cellulari elementari, un intorno formato da tre celle); non sono cioè ammesse 'azioni a distanza' fra le unità dell'automa;
2. in senso temporale; il nuovo valore di ogni cella dipende dal valore passato delle celle del suo intorno limitatamente ad un numero finito di periodi (per gli automi cellulari elementari, un solo periodo).

Un'ulteriore importante proprietà di questi automi è la loro sostanziale omogeneità che si esplica lungo due diverse 'direzioni':

1. tutte le celle costituenti l'automa sono perfettamente uguali fra loro;
2. la legge evolutiva locale è la stessa per ogni cella, indipendentemente dalla posizione spazio-temporale in cui ci si trova.

Da ultimo va ricordato che negli automi cellulari l'evoluzione dello stato delle celle avviene in modo sincrono (esse vengono cioè 'aggiornate' tutte contemporaneamente) e si presta quindi ad essere simulata mediante macchine dotate di un elevato grado di parallelismo, con interconnessioni locali ed uniformi, quali ad esempio la CAM-6 di Toffoli e Margolus [Toffoli e Margolus (1987)].

1.2 Verso una definizione più generale.

Nella precedente sezione si è parlato dei cosiddetti automi cellulari elementari: automi ad una sola dimensione e con due soli possibili stati per ogni unità, nei quali lo stato di ogni cella in un dato periodo dipende da quelli assunti dalla medesima cella e dalle due celle del suo intorno nel periodo precedente.

Si tratta chiaramente di un esempio assai particolare di automa cellulare. La nozione può di fatto essere ampliata in diversi modi, fra cui, principalmente:

1. facendo sì che ogni cella possa assumere due o più stati diversi;
2. considerando regole locali che agiscono su intorni con un numero arbitrario (ma finito) di celle;
3. ipotizzando che la regola locale si estenda su più periodi di tempo;
4. limitandosi a considerare insiemi finiti di unità elementari;
5. considerando distribuzioni delle celle in spazi a più dimensioni;
6. introducendo elementi probabilistici nelle leggi evolutive dell'automata.

L'idea contenuta al punto 1 porta ad una ridefinizione dell'insieme S , costituito non più esclusivamente da 0 e 1, ma da un numero arbitrario (e finito) k di elementi:

$$S_k = \{0, 1, \dots, k-1\}. \quad (1.13)$$

Noi qui, per non appesantire troppo la notazione, penseremo S_k costituito sempre dai primi k interi $0, 1, \dots, k-1$. Nulla però vieta di considerare k simboli generici, quali ad esempio lettere dell'alfabeto, colori dei pixels di un monitor, ecc...

Una configurazione diventa in tal caso una stringa bi-infinita di k simboli $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$, con $x_i \in S_k$, e lo spazio delle configurazioni, l'insieme di tutte queste stringhe, resta definito da⁽⁷⁾:

$$X = S_k^{\mathbf{Z}} = \{\mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}} : x_i \in S_k \forall i \in \mathbf{Z}\}. \quad (1.14)$$

Il punto 2 suggerisce invece una estensione dell'azione spaziale di F , portando a considerare regole evolutive che fanno dipendere lo stato futuro di ogni cella dal valore presente della cella medesima e da quello delle $2r$ celle ad essa più vicine:

$$x_i^{t+1} = F[x_{i-r}^t, \dots, x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+r}^t] \quad \forall i \in \mathbf{Z} \quad \text{e} \quad \forall t \in \mathbf{N}. \quad (1.15)$$

dove r prende il nome di ampiezza, o *raggio*, dell'intorno e dove F è ora una mappa da S^{2r+1} ad S . Ancora una volta, ad ogni regola locale F è associata una regola globale $f : X \rightarrow X$ definita secondo (1.4) e (1.5).

⁷Per una esposizione rigorosa delle proprietà di questo insieme, si faccia riferimento alla sezione A.1 dell'Appendice Matematica.

In 3 è contenuta un'altra importante indicazione sul modo in cui la definizione di F può essere allargata: lo stato futuro della i -esima unità può essere fatta dipendere dai T stati passati delle celle del suo r -intorno (e non semplicemente da quello del periodo immediatamente precedente). Se indichiamo con ${}_r x_i^t$ lo stato al tempo t delle $2r + 1$ celle costituenti l'intorno di raggio r della cella i -esima, cioè ${}_r x_i^t = (x_{i-r}^t, \dots, x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+r}^t)$, la regola locale può allora essere così ridefinita:

$$x_i^{t+1} = F[{}_r x_i^t, {}_r x_i^{t-1}, \dots, {}_r x_i^{t-T+1}] \quad \forall i \in \mathbf{Z} \quad \text{e} \quad \forall t \in \mathbf{N}. \quad (1.16)$$

In tale caso si parla di *sistemi di ordine T* [Toffoli e Margolus (1987)].

Sino ad ora abbiamo trattato di automi cellulari infiniti, le cui dinamiche si sviluppano su reticoli costituiti da un numero infinito di unità elementari. Di particolare interesse risulta però anche il caso finito, in cui l'automata cellulare è dotato di sole N celle. I motivi che ci spingono a considerarli sono fondamentalmente due. Da un lato, essi sono di fatto i soli automi su cui possiamo compiere esperimenti e simulazioni, dato che solo per essi siamo in grado di ricostruire compiutamente l'evoluzione temporale utilizzando per un tempo finito un generico strumento di calcolo dotato di memoria finita. Dall'altro, molto spesso il fenomeno che si intende modellizzare coinvolge solo un numero (magari grande, ma) finito di unità elementari fra di esse localmente interagenti. L'uso di un automa finito viene in tal caso imposta dallo stesso oggetto che si sta studiando.

Due fatti molto importanti devono essere tenuti in considerazione trattando questo tipo di CA:

1. la particolare natura di F impone che l'automata sia dotato di una opportuna condizione al contorno (*boundary condition*).; essa può consistere ad esempio nell'imporre che tutte le celle 'esterne' rispetto alle N considerate siano sempre a livello 0 e non evolvano sotto l'azione della regola locale (*null boundary condition*); nella quasi totalità dei casi si preferisce però considerare le celle come se fossero disposte in modo circolare, cosicché la prima e l'ultima cella sono fra loro accostate (*periodic boundary condition*);
2. lo spazio X degli stati è ora un insieme finito costituito da k^N elementi e pertanto, dopo un numero più o meno lungo di iterazioni (minore di k^N), ogni automa cellulare deve ritornare su uno degli stati già assunti in precedenza; se la regola locale F è deterministica, l'automata entra quindi sempre e necessariamente in un ciclo di periodo al più k^N , e quindi viene escluso qualsiasi comportamento aperiodico.

Un'altra importantissima generalizzazione consiste nel considerare automi cellulari le cui unità elementari sono disposte nello spazio su reticoli regolari a due o più dimensioni (Fig. 1.6). Naturalmente in questo caso la posizione di una singola cella sul reticolo non può più essere individuata univocamente da un solo indice i , ma si rende necessario l'uso di una stringa di indici. Supponendo di considerare un reticolo d -dimensionale, l'indice di ogni cella deve cioè essere: $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbf{Z}^d = \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}$ (d volte), e lo stato di una

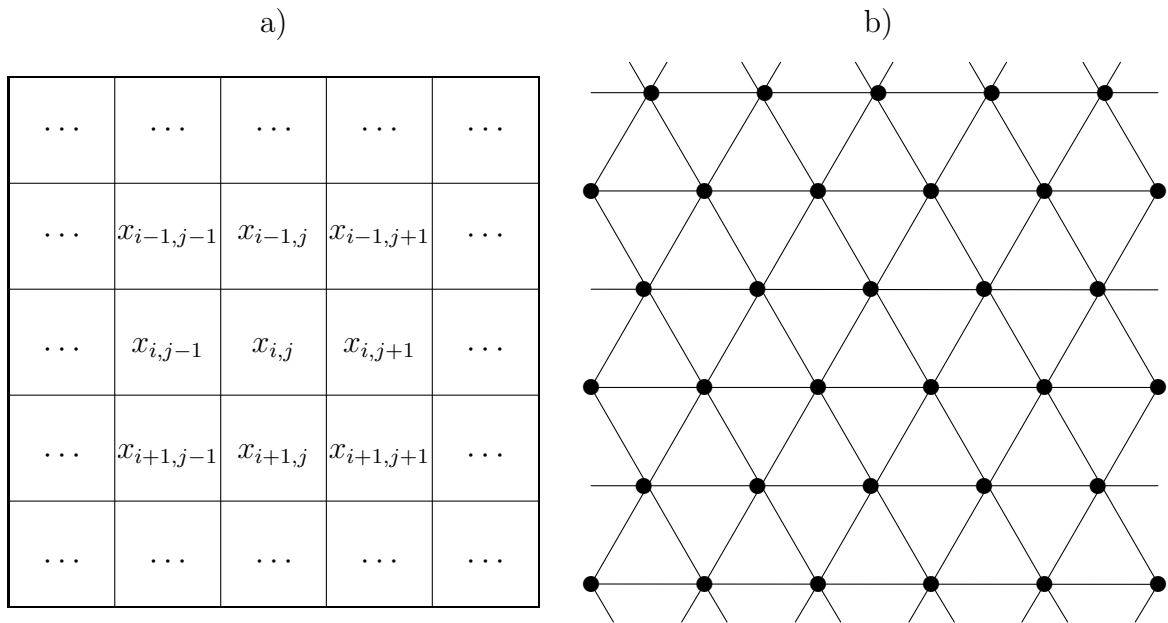


Figura 1.6: Esempi di reticoli regolari bidimensionali, quadrato a) ed esagonale b).

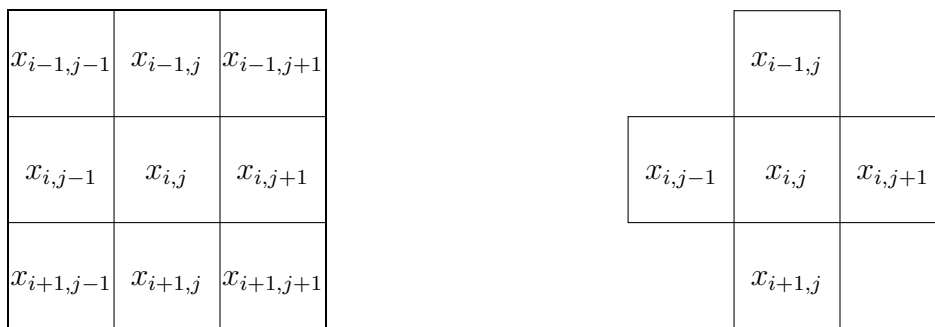


Figura 1.7: Intorni a 8 e 5 celle su un reticolo regolare bidimensionale quadrato.

cella viene indicato con $x_{\mathbf{i}}$, dove $x_{\mathbf{i}} \in S_k \forall \mathbf{i} \in \mathbf{Z}^d$. Lo spazio delle configurazioni diventa allora:

$$X = S_k^{\mathbf{Z}^d} = \{\mathbf{x} = \{x_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^d} : x_{\mathbf{i}} \in S_k \forall \mathbf{i} \in \mathbf{Z}^d\}. \quad (1.17)$$

L'estensione della nozione di automa cellulare su spazi a più dimensioni è carica, come avremo (in parte) modo di vedere, di numerose ed importanti conseguenze.

Per ora ci limitiamo ad osservare che in CA a più dimensioni il numero delle possibili strutture degli intorni aumenta considerevolmente rispetto al caso unidimensionale. Considerando ad esempio il semplice caso a due dimensioni con un raggio r pari ad uno, si possono formulare diversi tipi di intorno: quello formato dalle otto celle più vicine più la cella stessa ('*nine-neighbor square*') usualmente indicate N, S, E, W, NW, NE, SW, SE, ricorrendo ai quattro punti cardinali come se le celle fossero disposte su di una carta topografica [Rucker (1989)]; oppure quello dotato delle sole cinque celle N, S, W, E, C (centrale) ('*five-neighbor square*') (Fig. 1.7); oppure ancora quello relativo ad un reticolo esagonale, composto da sei celle più una.

Per automi cellulari finiti in più dimensioni si arricchisce pure la gamma di possibili condizioni periodiche al contorno che si possono formulare. Ancora per il caso bidimensionale, si potrebbe ad esempio pensare di ripiegare semplicemente su se' stessi i 'lembi' del reticolo per poi accostarli fra loro, imponendo una struttura del tipo qui sotto rappresentato:

x_{MN}	x_{M1}	x_{M2}	\dots		x_{MN-1}	x_{MN}	x_{M1}
x_{1N}	x_{11}	x_{12}	\dots		x_{1N-1}	x_{1N}	x_{11}
x_{2N}	x_{21}	x_{22}	\dots		x_{2N-1}	x_{2N}	x_{21}
\vdots	\vdots	\vdots			\vdots	\vdots	\vdots
x_{M-1N}	x_{M-11}	x_{M-12}	\dots		x_{M-1N-1}	x_{M-1N}	x_{M-11}
x_{MN}	x_{M1}	x_{M2}	\dots		x_{MN-1}	x_{MN}	x_{M1}
x_{1N}	x_{11}	x_{12}	\dots		x_{1N-1}	x_{1N}	x_{11}

Figura 1.8:

in cui le celle indicate nella cornice tratteggiata non fanno realmente parte dell'automa, ma indicano solamente il tipo di condizione al contorno che è stata imposta.

Si potrebbero altrimenti attuare dei 'ripiegamenti' del reticolo un po' più complessi, di cui mostriamo qui un solo semplice ma interessante esempio:

L'introduzione di elementi stocastici nella legge evolutiva dell'automa, come suggerito al punto 6, può essere attuata secondo diverse modalità. Un primo (assai semplice) metodo consiste nell'inserire 'rumore' direttamente nella rule table della funzione F , associando cioè ad una o più configurazioni dell'intorno non un singolo e ben determinato stato, ma una distribuzione di probabilità sugli stati, in altri termini una k -pla $\{p_1, \dots, p_k\}$, con $\sum_i p_i = 1$. In [Grassberger *et al.* (1984)] vengono analizzati alcuni automi cellulari elementari di tale tipo. A titolo d'esempio riportiamo uno di essi in Fig. 1.10. Per $p = 0$ questo corrisponde alla regola 94, e per $p = 1$ alla regola 22.

Un modello più generale (che ricomprende anche quello qui sopra riportato) di *automa cellulare stocastico* è stato presentato da [Kinzel (1985)]. L'autore considera un automa cellulare finito formato da N celle, ciascuna delle quali può assumere k stati diversi.

x_{1N}	x_{M1}	x_{M2}	\cdots		x_{MN-1}	x_{MN}	x_{11}
x_{MN}	x_{11}	x_{12}	\cdots		x_{1N-1}	x_{1N}	x_{M1}
x_{M-1N}	x_{21}	x_{22}	\cdots		x_{2N-1}	x_{2N}	x_{M-11}
\vdots	\vdots	\vdots			\vdots	\vdots	\vdots
x_{2N}	x_{M-11}	x_{M-12}	\cdots		x_{M-1N-1}	x_{M-1N}	x_{21}
x_{1N}	x_{M1}	x_{M2}	\cdots		x_{MN-1}	x_{MN}	x_{11}
x_{MN}	x_{11}	x_{12}	\cdots		x_{1N-1}	x_{1N}	x_{M1}

Figura 1.9:

Indichiamo con \mathbf{x}_ν (con $\nu = 1, \dots, k^N$) uno dei k^N possibili stati globali del sistema e con P_ν^t la probabilità associata allo stato ν . Detta probabilità evolve nel tempo in base alla:

$$P_\nu^{t+1} = \sum_{\mu=1}^{k^N} T_{\nu\mu} P_\mu^t, \quad (1.18)$$

dove la *probabilità di transizione* $T_{\nu\mu}$ indica la probabilità di avere in un dato periodo lo stato ν se il sistema si trova nello stato μ nel periodo precedente.

A loro volta queste probabilità sono definite attraverso regole locali del tipo:

$$T_{\nu\mu} = \prod_{i=1}^N p([\mathbf{x}_\nu]_i \mid [\mathbf{x}_\mu]_{i-1}, [\mathbf{x}_\mu]_i, [\mathbf{x}_\mu]_{i+1}), \quad (1.19)$$

dove $[\mathbf{x}_\mu]_i$ indica lo stato della cella i -esima quando l'automa si trova nello stato (globale) μ -esimo e $p(A|B)$ indica la probabilità condizionata dell'evento A dato B . Come in ogni automa cellulare, anche qui la transizione dello stato della cella i -esima è legata, in termini probabilistici, esclusivamente allo stato delle celle del suo intorno⁽⁸⁾. L'evoluzione nel tempo dell'automa cellulare stocastico è quindi interamente regolata dalla matrice⁽⁹⁾

⁸La generalizzazione ad un intorno di raggio r è immediata.

⁹Si dimostra che \mathbf{p} ha rango al più pari a $k - 1$, dato che ogni cella deve sempre necessariamente assumere uno dei k possibili stati di S , dato cioè il vincolo $\sum_\nu p_{\nu\mu} = 1 \forall \mu = 1, \dots, k^N$.

$(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$	x_i^{t+1}
1 1 1	0
1 1 0	0 con prob. p 1 con prob. $1 - p$
1 0 1	0
1 0 0	1
0 1 1	0 con prob. p 1 con prob. $1 - p$
0 1 0	1
0 0 1	1
0 0 0	0

Figura 1.10: Rule table dell'automa cellulare stocastico dell'esempio 1.9.

$k^3 \times k$: $\mathbf{p} = \{p_{\nu\mu}\} = p([\mathbf{x}_\nu]_i | [\mathbf{x}_\mu]_{i-1}, [\mathbf{x}_\mu]_i, [\mathbf{x}_\mu]_{i+1})$. La matrice \mathbf{p} è cioè, in un certo senso, l'equivalente della rule table del caso deterministico.

A ben guardare, gli automi cellulari deterministici risultano essere un caso particolare di quelli stocastici, in cui gli elementi che figurano nella matrice \mathbf{p} sono esclusivamente 1 e 0. Questo fatto viene chiarito negli esempi che seguono.

Esempio 1.9 Costruiamo la matrice \mathbf{p} relativa al modello mostrato in Fig. 1.10. Essa risulta così strutturata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & 1-p \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

L'elemento p_{32} è uguale a 0. Ciò significa che, quando l'intorno è nello stato 1 0 1 al tempo t , lo stato della cella al tempo $t + 1$ è 1 con probabilità nulla (mai). Diversamente, p_{31} uguale a 1 significa stato 0 con certezza.

Esempio 1.10 Consideriamo ancora la rule table stocastica di Fig. 1.10 e un automa cellulare finito (con la classica condizione periodica al contorno) formato da sole $N = 5$ unità. Lo stato presente sia $\mu = 10010$. Si vuole calcolare la probabilità di transizione $T_{\nu\mu}$ dallo stato μ al nuovo stato $\nu = 11111$, cioè :

$$\begin{array}{c} 0|10010|1 \\ \downarrow \\ 11111 \end{array}$$

Si ricava agevolmente che: $T_{\nu\mu} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$. Assumendo invece $\mu = 11011$ e $\nu = 01010$, abbiamo:

$$\begin{array}{c} 1|11011|1 \\ \Downarrow \\ 01010 \end{array}$$

e quindi $T_{\nu\mu} = 1 \cdot (1 - p) \cdot 1 \cdot (1 - p) \cdot 1 = (1 - p)^2$.

1.3 Automi cellulari reversibili

Parlando degli automi cellulari elementari dotati di una regola globale $f : X \rightarrow X$ non invertibile, si è da un lato osservato che non è possibile ricostruire a ritroso le dinamiche che hanno condotto il sistema allo stato presente e dall'altro che esistono in X configurazioni prive di predecessori (giardini dell'Eden). Sorge allora spontaneo un primo quesito: "Sotto quali condizioni la mappa f è invertibile?". In generale, affinché una qualunque funzione sia invertibile è necessario che sia biiettiva, cioè contemporaneamente iniettiva e suriettiva. [Richardson (1972)] ha dimostrato che l'iniettività di f implica anche la sua suriettività (e non viceversa): l'iniettività è allora sinonimo di biiettività e quindi di invertibilità .

Una questione più delicata è stabilire sotto quali condizioni la mappa globale f di un automa cellulare (caratterizzato quindi da una descrizione locale F), sia dotata di una inversa, a sua volta munita di una mappa locale G . In altri termini, si vuole stabilire se l'automa è *reversibile*, cioè se esiste un altro automa cellulare f^{-1} tale che, per ogni coppia di configurazioni \mathbf{x}_1 e $\mathbf{x}_2 \in X$, $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2$ se e solo se $f^{-1}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1$.

Il problema della reversibilità è chiaramente più complesso della semplice invertibilità, esso infatti richiede due distinte condizioni: a) che esista una inversa di f e b) che questa inversa sia a sua volta un automa cellulare, cioè ammetta una descrizione locale G . Un primo fondamentale risultato di [Richardson (1972)] stabilisce che:

Teorema 1.1 *Un automa cellulare è globalmente iniettivo se e solo se è reversibile.*

Nella teoria degli automi cellulari non esiste cioè alcuna differenza fra lo studio della reversibilità, della biiettività e della iniettività delle mappe globali. La dimostrazione del teorema 1.1 non è però costruttiva, nel senso che non fornisce alcun metodo per individuare la mappa locale G dell'automa inverso.

È stato comunque provato [Toffoli e Margolus (1990)] che esiste sempre una procedura per decidere se, date due mappe locali F_1 e F_2 , definite sul medesimo insieme di configurazioni, le corrispondenti mappe globali f_1 e f_2 sono l'una l'inversa dell'altra. In questo caso la prova è costruttiva e fornisce il modo attraverso cui verificare se due mappe locali afferiscono ad automi cellulari fra loro 'inversi'.⁽¹⁰⁾

¹⁰È comunque ragionevole aspettarsi che sia possibile provare l'invertibilità di un automa cellulare anche senza dover necessariamente specificare la mappa locale dell'automa inverso. Per ora ciò non è mai stato fatto; per tutti gli automi cellulari invertibili conosciuti sino ad oggi, accanto alla mappa locale è infatti stata sempre specificata la relativa mappa locale 'inversa'.

È assai facile provare che (cfr. [Toffoli e Margolus (1990)]):

Teorema 1.2 *La classe degli automi cellulari invertibili è elencabile ricorsivamente.*

Per prima cosa generiamo sequenzialmente tutte le mappe locali in ordine crescente di complessità, cioè aumentando via via il numero di stati dell'insieme S_k ed il raggio dell'intorno r . Per ciascun elemento F di questa sequenza iniziamo poi una seconda elencazione di tutte le mappe locali, verificando al contempo se ognuno di questi elementi F' è la mappa locale 'inversa' di F . Chiaramente, ogni accoppiamento fra mappe locali individua un automa cellulare reversibile ed ogni CA reversibile viene individuato tramite la duplice elencazione di cui sopra. In altri termini, l'invertibilità degli automi cellulari è un problema almeno *semi-decidibile*, nel senso che, se un dato automa è invertibile, la procedura sopra detta ce lo indica, mentre se non è invertibile, in nessun momento ne verremo a conoscenza.

Per quanto riguarda gli automi cellulari ad una dimensione è stato anche provato il seguente fatto:

Teorema 1.3 *Esiste una procedura per decidere se un arbitrario CA unidimensionale, specificato attraverso la sua mappa locale, è o non è invertibile.*

mentre per dimensioni d maggiori:

Teorema 1.4 *Non esiste una procedura per decidere se un arbitrario CA di dimensione $d \geq 2$, specificato attraverso la sua mappa locale, è o non è invertibile.*

Se da un lato i risultati teorici pongono in luce l'intrinseca difficoltà del problema di provare l'invertibilità di un automa cellulare, esistono dall'altra svariate tecniche che ci permettono di costruire in modo molto agevole un grande numero di automi cellulari invertibili (ICA d'ora in poi) non banali. Due di esse meritano una particolare attenzione, e precisamente (cfr. [Toffoli e Margolus (1990)]) le tecniche di *secondo ordine* e quelle di *partizione*.

Il primo metodo è basato sull'idea della costruzione di un sistema dinamico invertibile a partire da uno arbitrariamente dato. Supponiamo che quest'ultimo sia governato da una legge evolutiva τ del tipo:

$$\mathbf{y}^{t+1} = \tau(\mathbf{y}^t), \quad (1.21)$$

la quale, in generale, dà luogo a dinamiche non invertibili. A partire da esso, si può allora costruire un nuovo sistema definito da:

$$\mathbf{y}^{t+1} = \tau(\mathbf{y}^t) - \mathbf{y}^{t-1}, \quad (1.22)$$

che è un sistema dinamico di secondo ordine, in cui cioè lo stato futuro è funzione di quello presente e di quello del periodo appena trascorso. Questo tipo di sistema conduce

evidentemente a dinamiche reversibili. Infatti, qualsiasi sia la natura⁽¹¹⁾ (invertibile o no) di τ , si ha:

$$\mathbf{y}^{t-1} = \tau(\mathbf{y}^t) - \mathbf{y}^{t+1}, \quad (1.23)$$

cioè, data una coppia di stati consecutivi, è sempre possibile determinare univocamente l'intera evoluzione del sistema in avanti e a ritroso nel tempo.

Queste considerazioni possono essere direttamente applicate agli automi cellulari. Data infatti una generica mappa locale:

$$F[x_{i-r}^t, \dots, x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+r}^t] \quad \forall \mathbf{i} \in \mathbf{Z}^d \quad \text{e} \quad \forall t \in \mathbf{N}. \quad (1.24)$$

si costruisce un automa cellulare di secondo ordine la cui mappa locale è:

$$x_i^{t+1} = F[x_{i-r}^t, \dots, x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+r}^t] - x_i^{t-1} \quad \forall i \in \mathbf{Z}^d \quad \text{e} \quad \forall t \in \mathbf{N}. \quad (1.25)$$

dove “-” indica la differenza modulo k ⁽¹²⁾ (con k definito come in (1.13)).

Quindi, volendo ricostruire l'evoluzione dell'automa in avanti o all'indietro nel tempo è sufficiente:

1. applicare per ogni cella la regola locale F che tiene conto dello stato delle celle dell'intorno relativamente al periodo presente;
2. calcolare lo stato futuro (passato) sottraendo⁽¹³⁾ al risultato trovato al punto 1 lo stato passato (futuro) della medesima cella.

Esempio 1.11 Casi di automi cellulari reversibili di secondo ordine, rispettivamente uni- e bi-dimensionali, sono AXONS e FRACTAL, riportati in [Rucker (1989)] pp. 142-144 e pp. 161-163. Ad esso (ed al relativo software CA Lab.) rimandiamo per ogni dettaglio tecnico e per molte interessanti simulazioni numeriche.

La tecnica di costruzione di automi cellulari reversibili tramite partizione (*partitioning*) si basa invece su di un'idea completamente diversa, i cui caratteri fondamentali potremmo così riassumere:

1. il reticolo spaziale di celle dell'automa viene suddiviso (partito) in una collezione di pezzi fra loro disgiunti, detti *blocchi*;
2. viene data una regola evolutiva invertibile sui blocchi della partizione, anziché sugli intorni, cioè una legge (eguale per tutti i blocchi) che stabilisce lo stato futuro delle celle del blocco sulla base del loro stato presente;

¹¹E indipendentemente dal fatto che nel calcolo di τ vengano commessi errori di arrotondamento o di troncamento.

¹²Si veda l'Appendice Matematica.

¹³Si possono comunque ottenere molti altri ICA di secondo ordine sostituendo all'operazione di sottrazione altri tipi di operatori.

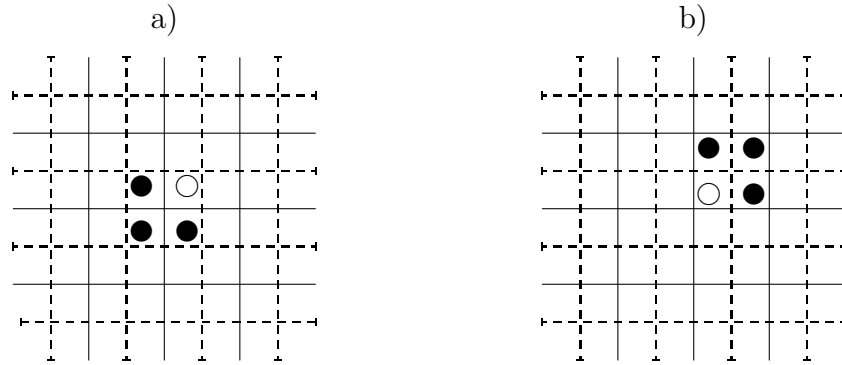


Figura 1.11: Partizioni e blocchi di celle nell'esempio 1.12.

3. dato che i blocchi non si sovrappongono, se l'evoluzione del sistema si limitasse all'applicazione della regola del punto 2, non si avrebbe alcuno scambio di informazione fra blocchi adiacenti e l'automa cellulare reversibile così costruito sarebbe di fatto una semplice collezione di sottosistemi indipendenti priva di interesse pratico; si rende allora necessario mutare ad ogni iterazione la partizione utilizzata, in modo da avere una sovrapposizione fra i blocchi utilizzati ad un periodo e quelli del periodo successivo, e quindi un fluire di informazione fra le varie regioni dell'automa.

Si viene in tal modo a realizzare un automa cellulare ⁽¹⁴⁾ che è chiaramente reversibile, data la particolare invertibilità di natura locale imposta nella costruzione, e che, grazie all'espedito del punto 3, si configura come un vero e proprio complesso interagente in cui l'informazione si trasmette in qualunque punto del reticolo, a qualunque distanza esso si trovi.

Esempio 1.12 Consideriamo un reticolo bidimensionale in cui ciascuna cella può assumere due soli stati. Su di esso prendiamo due semplici partizioni P_0 e P_1 in blocchi di 2×2 celle, sostanzialmente identiche fra loro ma 'sfasate' di una posizione nello spazio (nella Fig. 1.11 le abbiamo indicate rispettivamente con linee continue e tratteggiate). Ogni singola cella viene quindi ad appartenere a blocchi diversi a seconda che si consideri l'una o l'altra delle partizioni (casi a) e b) di Fig. 1.11).

Diamo poi una regola invertibile F sui blocchi, così definita: in ogni blocco della partizione si scambia il contenuto di ogni cella con quello della cella ad essa diagonalmente opposta⁽¹⁵⁾. Tale regola (e, più in generale, tutte le block rule) può essere meglio visualizzata attraverso una tavola delle transizioni di stato, in cui i due stati di ciascuna cella sono indicati rispettivamente con un cerchio vuoto ed uno pieno:

Ad ogni iterazione applichiamo sui blocchi la regola evolutiva F , alternando, periodo dopo periodo, la partizione P_0 con la partizione P_1 , come suggerito al punto 3. Poiché ad ogni coppia (F, P) corrisponde (a livello globale) una regola f , l'evoluzione è allora governata

¹⁴Può forse non risultare subito ovvio che il sistema qui realizzato tramite partitioning è un automi cellulari, in conformità alle definizioni fornite nelle sezioni precedenti. L'esempio 1.12 cercherà di far luce su questo punto.

¹⁵È questa la regola SWAP-ON-DIAG indicata in [Toffoli e Margolus (1987)].

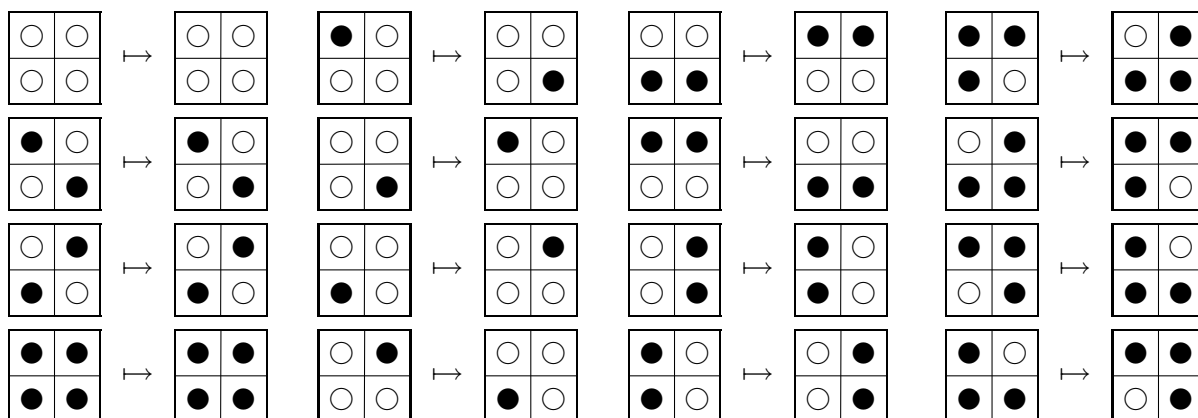


Figura 1.12: *Block rule* dell'esempio 1.12.

dall'alternarsi di due regole f_0 e f_1 . La Fig. 1.13 evidenzia l'evoluzione di questo sistema per due periodi, a partire da una condizione iniziale molto semplice (tutte le celle a livello 0 eccetto tre) e nell'ipotesi che la prima partizione impiegata sia quella indicata con linea continua.

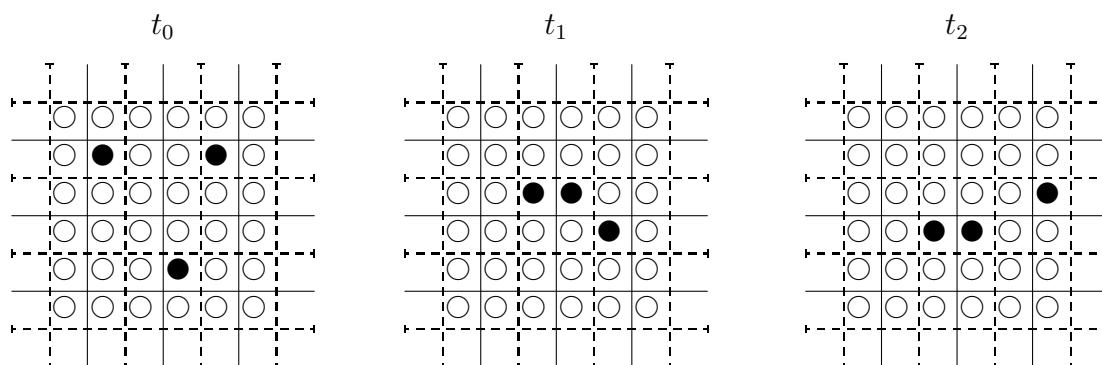


Figura 1.13: Evoluzione su due periodi dell'automa cellulare descritto nell'esempio 1.12.

Si viene in tal modo a realizzare un sistema dinamico che gode delle tre succitate proprietà:

1. è un automa cellulare, basta infatti pensare ogni blocco come una 'super-cella' su cui agisce la regola locale F , ed ogni composizione di due intervalli successivi di tempo come una 'super-iterazione' su cui è definita una mappa globale $f = f_1 \circ f_2$;
2. è reversibile, prova ne è il fatto che noi possiamo facilmente ed in modo univoco ricostruire a ritroso nel tempo le sue dinamiche; supponendo infatti che l'ultima iterazione sia stata compiuta sulla partizione P_1 , il primo passo del processo inverso utilizza nuovamente P_1 e come regola evolutiva la block rule ottenuta dalla Fig. 1.12 rovesciando la direzione delle frecce (cioè guardando all'argomento della seconda colonna e ricavando il risultato dalla prima), il secondo utilizza P_0 e la block rule inversa, e così via...
3. l'informazione si trasmette attraverso i blocchi a qualsiasi distanza; considerando lo stato di una cella sul reticolo, che potremmo pensare come un 'bit di informazione' all'interno del sistema, abbiamo infatti visto che l'evoluzione dell'automa induce lo spostamento dell'informazione sul reticolo lungo traiettorie diagonali (ad una velocità costante di una cella per iterazione), la cui direzione dipende dalla posizione iniziale assunta.

Va altresì notato che in questo tipo di automa non avvengono mai 'collisioni' fra bit di informazione adiacenti: se essi si trovano sulla medesima diagonale e vanno avvicinandosi, una volta entrati nello stesso blocco si scambiano di posto senza interagire, e così pure se stanno viaggiando su due diagonali che si intersecano (vedi Fig. 1.14). La dinamica dell'esempio 1.12 è quindi piuttosto banale: ogni 'particella' costituisce in un certo qual senso un sistema isolato. Comportamenti più interessanti possono essere ad esempio ottenuti ammettendo la possibilità di collisioni, imponendo cioè che i bit che viaggiano in direzioni opposte sulla medesima diagonale, fuggano in direzioni opposte nel momento in cui entrano in contatto, anziché procedere indisturbati [Toffoli e Margolus (1987)].

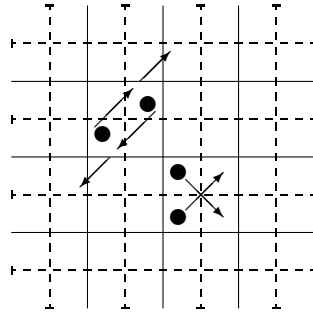


Figura 1.14: Movimento dei bit d'informazione per l'automata dell'esempio 1.12.

1.4 Descrizione del comportamento dinamico.

1.4.1 Introduzione.

In linea generale, due sono i principali problemi che si possono individuare nel contesto della teoria e dell'applicazione degli automi cellulari [Gutowitz (1990a)]:

1. il *problema diretto*; dato un automa cellulare, o meglio, data una regola locale F , si vuole caratterizzare il suo comportamento attraverso la determinazione di una serie di proprietà (qualitative e quantitative) fondamentali;
2. il *problema inverso*; trovare una regola, od un insieme di regole, che siano dotate di un predefinito insieme di proprietà, ritenute in qualche modo interessanti.

A sua volta il problema inverso, i cui primi diretti contributi risalgono a questi ultimissimi anni (cfr. [Lee *et al.* (1990)], [Qian *et al.* (1990)], [Richards *et al.* (1990)]), si articola sostanzialmente in due fasi: a) iniziale utilizzazione di qualsiasi informazione disponibile sul fenomeno da modellizzare, al fine di circoscrivere quanto più possibile l'insieme degli automi cellulari che devono essere presi in considerazione, e b) successiva ricerca su detto insieme degli automi che sono dotati delle proprietà richieste. Affinchè tale ricerca possa realmente essere condotta in modo efficiente, è indispensabile perciò avere conoscenza della struttura dello spazio degli automi cellulari, è necessario cioè conoscere in che modo mutano le loro proprietà muovendosi da una zona all'altra dello spazio, tramite modificazioni introdotte nella rule table.

Quest'ultimo è chiaramente un problema diretto, avendo come obiettivo la caratterizzazione delle proprietà degli automi, ma conduce a costruire il contesto indispensabile per poter affrontare in maniera adeguata il problema inverso. D'altro canto il problema diretto viene solitamente studiato solo per quelle regole che sono state in precedenza classificate (secondo un qualche criterio) 'interessanti'. Quindi, anche se per esigenze di esposizione li abbiamo voluti tenere concettualmente distinti, problema diretto e problema inverso sono in realtà indissolubilmente compenetrati l'uno nell'altro ed il loro sviluppo è destinato a procedere di pari passo.

Appendice Matematica.

A.1 Proprietà topologiche di S e X .

Per il lettore interessato, diamo qui una caratterizzazione un po' più tecnica degli insiemi S e X definiti rispettivamente in (1.13) e (1.17).

Bibliografia

- [Albin (1987)] P.S. Albin, *Microeconomic foundations of cyclical irregularities or 'chaos'*, Mathematical Social Sciences, **13**, pp. 185-214, 1987.
- [Culik II *et al.* (1990a)] K. Culik II, L.P. Hurd e S. Yu, *Computation theoretic aspects of cellular automata*, Physica D45, pp. 357-378, 1990.
- [Culik II *et al.* (1990b)] K. Culik II, L.P. Hurd e S. Yu, *Formal languages and global cellular automaton behavior*, Physica D45, pp. 396-403, 1990.
- [Grassberger *et al.* (1984)] P. Grassberger, F. Krause e T. von der Twer, *A new type of kinetic critical phenomenon*, Journal of Physics A,: Math. Gen. **17**, pp. 105- 109, 1984. Ristampato in: S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1986.
- [Gutowitz (1990a)] H.A. Gutowitz, *Introduction*, Physica D45, pp. vii-xiv, 1990.
- [Gutowitz (1990b)] H.A. Gutowitz, *A hierarchical classification of cellular automata*, Physica D45, pp. 136-156, 1990.
- [Hanson e Crutchfield (1991)] J.E. Hanson e J.P. Crutchfield, *The attractor-Basin Portrait of a Cellular Automaton*, Working Paper 91-02-012, Santa Fe Institute Series, 1991.
- [Lee *et al.* (1990)] Y.C. Lee, S. Qian, R.D. Jones, C.W. Barnes, G.W. Flake, M.K. O'Rourke, K. Lee, H.H. Chen, G.Z. Sun, Y.Q. Zhang, D. Chen e C.L. Giles, *Adaptive stochastic cellular automata: theory*, Physica D45, pp. 159-180, 1990.
- [Jen (1990)] E. Jen, *Aperiodicity in one dimensional cellular automata*, Physica D45, pp. 3-18, 1990.
- [Kinzel (1985)] W. Kinzel, *Phase transistion in cellular automata*, Z. Phys. B: Condensed Matter 58, pp. 229- 244, 1985. Ristampato in: S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1986.
- [Li *et al.* (1990)] W. Li, N.H. Packard e C.G. Langton, *Transition phenomena in cellular automata rule space*, Physica D45, pp. 77-94, 1990.

- [Margolus (1984)] N. Margolus, *Physics-like models of computation*, Physica 10D, pp. 81-95, 1984. Ristampato in: S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1986.
- [Packard e Wolfram (1985)] N. Packard e S. Wolfram, *Two-dimensional cellular automata*, Journal of Statistical Physics, **38**, 5/6, pp. 901-946, 1985. Ristampato in: S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1986.
- [Qian *et al.* (1990)] S. Qian, Y.C. Lee, R.D. Jones, C.W. Barnes, G.W. Flake, M.K. O'Rourke, K. Lee, H.H. Chen, G.Z. Sun, Y.Q. Zhang, D. Chen e C.L. Giles, *Adaptive stochastic cellular automata: experiment*, Physica D45, pp. 181-188, 1990.
- [Richards *et al.* (1990)] F.C. Richards, T.P. Meyer e N.H. Packard, *Extracting cellular automaton rules directly from experimental data*, Physica D45, pp. 189-204, 1990.
- [Richardson (1972)] D. Richardson, *Tesselation with local transformations*, Journal of Computer Science, **6**, pp. 373-385.
- [Rucker (1989)] R. Rucker, *CA Lab user guide*, Autodesk, Inc., Sansalito CA, 1989.
- [Shereshevsky (1992)] M.A. Shereshevsky, *Lyapunov exponents for one-dimensional cellular automata*, Journal of Nonlinear Science, **2**, pp. 1-8, 1992.
- [Toffoli e Margolus (1987)] T. Toffoli e N. Margolus, *Cellular Automata Machine*, The MIT Press, Cambridge MA, 1987.
- [Toffoli e Margolus (1990)] T. Toffoli e N. Margolus, *Invertible cellular automata: a review*, Physica D45, pp. 229-253, 1990.
- [Wolfram (1983)] S. Wolfram, *Statistical mechanics of cellular automata*, Review of Modern Physics, **35**, pp. 601-644, 1983. Ristampato in: S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1986.
- [Wolfram (1984)] S. Wolfram, *Universality and complexity in cellular automata*, Physica 10D, pp. 1-35, 1984. Ristampato in: S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1986.
- [Wolfram (1986)] S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1986.
- [Wootters e Langton (1990)] W.W. Wootters e C.G. Langton, *Is there a sharp phase transition for deterministic cellular automata?*, Physica D45, pp. 95-104, 1990.